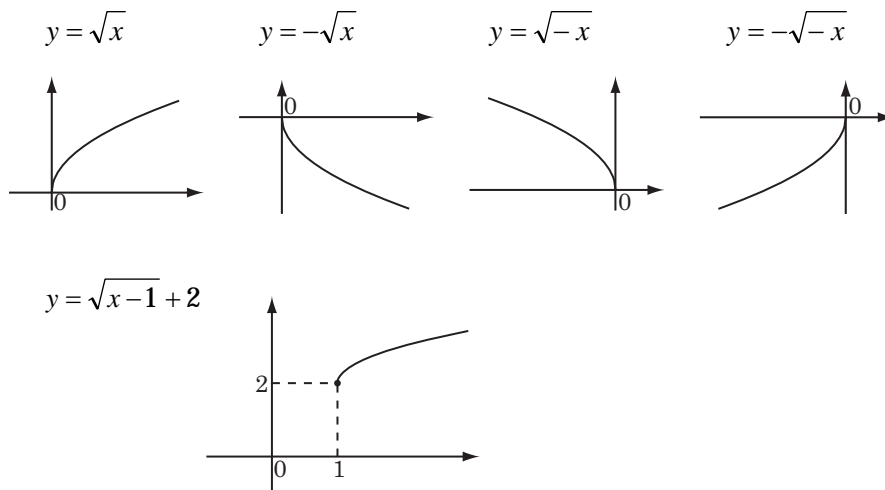


§2 無理関数

無理関数は、無理式で表される関数である。

グラフ



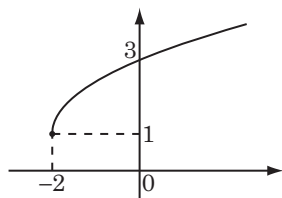
グラフをかく

- の中が0となる x を求める。→ $x=1$
- の中が0以上となる x の範囲を頭に入れる。→ $x \geq 1$
- の前の±を見て、 y が0以上か0以下かを考える。→ $y \geq 0$
- の外に± があるときは、全体を上下に± 移動する。→ 2だけ上に上げる。

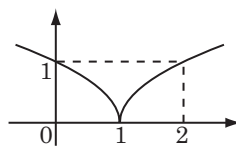
例題1 グラフを書け。

(1) $y = \sqrt{2x+4} + 1$ (2) $y = \sqrt{|x-1|}$

解答 (1)



(2)



例題2 方程式・不等式を解け。

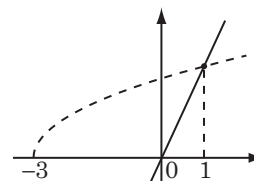
(1) $\sqrt{x+3} = 2x$ (2) $\sqrt{2x+4} < \frac{1}{3}x + 2$

解答 (1) $\sqrt{x+3} = 2x$ に対して、 $y = \sqrt{x+3}$ 、 $y = 2x$ とすると、これらの交点は

$x+3 = 4x^2$ より $(4x+3)(x-1) = 0$ 。よって、 $x = -\frac{3}{4}$ 、 1 。

ここで、右図より $x = -\frac{3}{4}$ は不適。

よって解は $x = 1$ 。



(2) $\sqrt{2x+4} < \frac{1}{3}x+2$ に対して, $y = \sqrt{2x+4}$, $y = \frac{1}{3}x+2$ とおく。

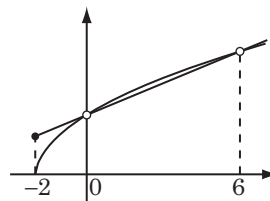
このとき, これらの交点は,

$\sqrt{2x+4} = \frac{1}{3}x+2$ の両辺を 2 乗して整理すると

$x(x-6) = 0$ 。 $\therefore x = 0, 6$ 。

ここで, 右図よりその解は

$-2 < x < 0, x > 6$ となる。



← (直線の方が上にある x の範囲を解とする)

§3 合成関数**定義**

関数 $y = f(x)$, $z = g(y)$ に対して, 関数 $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
を $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数という。

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & g \\ & & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ \\ & & x & & y & & z \end{array}$$

例題1 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x^2 + 1$ のとき, 合成関数 $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ を求めよ。

解答 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x+2)^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 9$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x^2 + 1) + 2 = 2x^2 + 3$$

§4 逆関数

定義

関数 $y = f(x)$ において, x と y が 1 対 1 に対応するとき, 対応の向きを逆にして, $x = g(y)$ と書ける。(その x と y を入れ替えた) $y = g(x)$ を $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ という。

例題1 逆関数を求めよ。

$$y = 2x - 4 \qquad y = \frac{x-3}{x-2} \quad (x > 2)$$

解答 $y = 2x - 4$

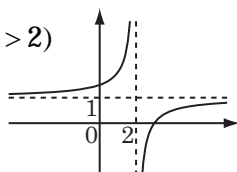
① x について解くと $x = \frac{1}{2}y + 2$ 。

よって, 逆関数は
(x と y を入れ替えて)

$$y = \frac{1}{2}x + 2。$$

$$y = \frac{x-3}{x-2} \quad (x > 2)$$

① $y = 1 - \frac{1}{x-2} \quad (x > 2)$



y の値域は, $y < 1$ 。

与式を x について解くと,

$$x = \frac{2y-3}{y-1} \quad (y < 1)。$$

よって, 逆関数は,

$$y = \frac{2x-3}{x-1} \quad (x < 1)。$$

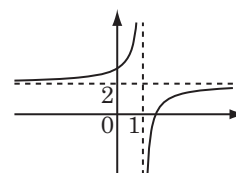
② はじめから x と y を入れ替えて, 逆関数は, $x = 2y - 4$ 。

これを整理して, $y = \frac{1}{2}x + 2$ 。

② 逆関数は, $x = \frac{y-3}{y-2} \quad (y > 2)$ 。

整理して,

$$y = \frac{2x-3}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$



$y > 2$ のとき, $x < 1$

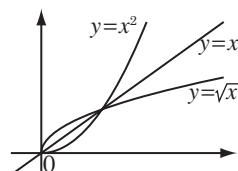
$$y = \frac{2x-3}{x-1} \quad (x < 1)。$$

f と f^{-1} を合成すると, 逆関数の定義より,

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x & \begin{matrix} f \\ \circ \end{matrix} & \begin{matrix} x \\ \xrightarrow{f} \\ y \end{matrix} & \begin{matrix} y = f(x) \\ \circ \\ x = f^{-1}(y) \end{matrix} \\ (f \circ f^{-1})(y) &= f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \end{aligned}$$

$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは, $y = x$ に関して対称である。

例 $y = x^2 \quad (x \geq 0)$ と $y = \sqrt{x}$



例題2 $f(x) = \frac{ax-1}{x+b}$ について, $f(1)=1$, $f^{-1}(2)=3$ のとき, a, b を求めよ。

解答 $f(x) = \frac{ax-1}{x+b}$ に対して, $f(1)=1$ より, $\frac{a-1}{1+b}=1$. $a-b=2$.

$f^{-1}(2)=3$ より $f(3)=2$. よって, $\frac{3a-1}{3+b}=2$. $3a-2b=7$.

以上より, $a=3$, $b=1$.