# 2　因数分解

## §1　因数と因数分解

### 1 因数分解とは

12 は$1\times 12$，$2\times 6$，$3\times 4$ と積の形に表せる。このとき 1，2，3，4，6，12 を 12 の因数という。そして$12=3\times 4$ と表すことを因数分解という。素数の因数を用いると$12=2^2\times 3$ のようにどんな整数もただ 1 通りの積の形に表せる。これが素因数分解である。整式の場合でも，$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ と因数分解できて $x+1$，$x+2$ が因数である。因数分解は，式の展開の逆バージョンである。

### 2 共通因数でくくる

優先順位第 1 位は，公式よりもまず共通因数でくくることである。

**例** ①　$3x^2y+12xy^2=3xy(x+4y)$　　共通因数は $3xy$

②　$2a(a-3)-4(3-a)$

$=2a(a-3)+4(a-3)$

$=2(a-3)(a+2)$　　共通因数は $2(a-3)$

### 3 乗法公式の利用

**2 次の乗法公式**

$$\xrightarrow{\text{展開}}\quad\xleftarrow[\text{因数分解}]{}$$

■ Ⅰ　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　(複合同順)

■ Ⅱ　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

■ Ⅲ　$(x+a)(a+b)=x^2+(a+b)x+ab$

■ Ⅳ　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

Ⅴは

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+abc+2ca$

であったが，因数分解には出にくいので省いた。

**3 次の乗法公式**

$$\xrightarrow{\text{展開}}\quad\xleftarrow[\text{因数分解}]{}$$

■ Ⅵ　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

■ Ⅶ　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

**例**　$x^3+8y^3$の因数分解

$x^3+(2y)^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

## 4 たすき掛け

公式Ⅳの因数分解はいわゆる「たすき掛け」である。
$x^2-5x-6$ なら和が $-5$，積が $-6$ の2数($-1$ と6)を見つければよいが，$6x^2+5x-6$ のように，$x^2$ の係数が 1 以外のときは $x^2$ の係数のことも考えなくてはならないので，そう簡単にはいかない。$6x^2+5x-6=6\left(x^2+\frac{5}{6}x-1\right)$ として，和が $\frac{5}{6}$，積が $-1$ の 2 数を見つけるのはたやすいことではない。

$6x^2+5x-6$ は $6x^2$ にあわせると，$(6x+\triangle)(x+\bigcirc)$ か $(3x+\square)(2x+☆)$ の組み合わせ，定数項の $-6$ にあわせると $(\cdots\pm3)(\cdots\mp2)$，$(\cdots\pm1)(\cdots\mp6)$ のどれかである。これらの組み合わせの中から，$x$ の係数が 5 になるものを選ぶのである。
ここで救いが 1 つある。それは $6x\pm2$，$6x\pm3$，$3x\pm3$，$2x\pm2$ の因数はできないことである。したがって，$(6x\pm1)$ と $(x\pm6)$，$(2x\pm3)$ と $(3x\pm2)$ の因数の組み合わせに限られる。係数だけ書き出して組み合わせを考えると，

$$
\begin{array}{ccccc}
6 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\
1 & & 6 & \longrightarrow & 36 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccr}
3 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\
2 & & 3 & \longrightarrow & 9 \\
\hline
 & & & & 5
\end{array}
$$

$(3x-2)$ と $(2x+3)$ の組み合わせからのみ $5x$ がつくれるので $6x^2+5x-6=(3x-2)(2x+3)$ と因数分解できる。

**注** 慣れてくると感が働き，2，3 個の組み合わせにしぼられるようになる。

**例** $6x^2-13x-15=(x-3)(6x+5)$

$$
\begin{array}{ccccr}
1 & & -3 & \longrightarrow & -18 \\
6 & & 5 & \longrightarrow & 5 \\
\hline
 & & & & -13
\end{array}
$$

**例題1** 次の式を因数分解せよ。

(1)　$6x^2-11x-10$

(2)　$12x^2-26xy+12y^2$

**考え方** (1)

$$
\begin{array}{ccccr}
3 & & 2 & \rightarrow & 4 \\
2 & & -5 & \rightarrow & -15 \\
\hline
 & & & & -11
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{ccccr}
2 & & -3 & \rightarrow & -9 \\
3 & & -2 & \rightarrow & -4 \\
\hline
 & & & & -13
\end{array}
$$

**解答** (1)　与式 $=(3x+2)(2x-5)$

(2)　与式 $=2(6x^2-13xy+6y^2)$

$=2(2x-3y)(3x-2y)$

## §2　複２次式

### 1 複２次式

$x^4$，$x^2$ の項からなる 4 次式を複 2 次式という。複 2 次式の因数分解は，$x^2=\mathrm{X}$ と置き換えてうまくいく場合とそうでない場合があるが，出題された限りは必ずできるはずである。
$x^2=\mathrm{X}$ の置き換えでうまくいかないときは，$\triangle^2-\bigcirc^2$ の形にもちこむのがコツ。

**複 2 次式の因数分解①**

**例題1**　$x^4+2x^2-24$ を因数分解せよ。

**解答**　$x^2=\mathrm{X}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}-24\\&=(\mathrm{X}-4)(\mathrm{X}+6)\end{aligned}$$

X をもとに戻して，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(x^2-4)(x^2+6)\qquad\leftarrow\text{まだできる}\\&=(x-2)(x+2)(x^2+6)\end{aligned}$$

**複 2 次式の因数分解②**

**例題2**　$x^4-3x^2+1$ を因数分解せよ。

**考え方**　$x^2=\mathrm{X}$ とおいてもうまくいかないので，$x^4+1=(x^2-1)^2+2x^2$ と式変形してみる。

**解答**　$x^4+1=(x^2-1)^2+2x^2$ と式変形すると，

$$\begin{aligned}x^4-3x^2+1&=(x^2-1)^2+2x^2-3x^2\\&=(x^2-1)^2-x^2\qquad\triangle^2-\bigcirc^2\text{ の形になった}\\&=(x^2+x-1)(x^2-x-1)\end{aligned}$$

## §3　因数分解の工夫

### 1 置き換え

複２次式のとき以外でも置き換えは有効な手段である。

**例題1**　$(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)-4$ を因数分解せよ。

**考え方**　$(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)-4$ を展開したら４次式になって因数分解が遠ざかっていく。

そこで，$x^2-2x=\mathrm{X}$ とおいて X の２次式に持ち込む。

**解答**　$x^2-2x=\mathrm{X}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}-4&=(\mathrm{X}-4)(\mathrm{X}+1)\\&=(x^2-2x-4)(x^2-2x+1)\quad \leftarrow \text{まだできる！}\\&=(x^2-2x-4)(x-1)^2\end{aligned}$$

### 2 次数の低い文字についての整理

公式がすぐに使えないような形の多項式は，１つの文字について整理するとうまくいく。この際、次数の低い方の文字について整理すると共通因数でくくれる形になるが、次数の高い文字について整理すると，たすき掛けを用いることになるのでやめたほうが良い。

**例題2**　$x^2y-2x^2z-xy^2+2y^2z$ を因数分解せよ。

**解答**　$x$，$y$ については２次，$z$ については１次なので，$z$ について整理すると

$$\begin{aligned}\text{与式}&=-2x^2z+2y^2z+x^2y-xy^2\\&=-2(x^2-y^2)z+xy(x-y)\\&=-2(x+y)(x-y)z+xy(x-y)\\&=(x-y)\{-2(x+y)z+xy\}\\&=(x-y)(xy-2yz-2zx)\end{aligned}$$

**別解**　$x$ について整理すると，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(y-2z)x^2-y^2x+2y^2z\\&=\{(y-2z)x-2yz\}(x-y)\\&=(x-y)(xy-2yz-2zx)\end{aligned}$$

次の例は $a$，$b$，$c$ どの文字も最高次数が同じなので，どれか１つの文字について整理する。

**例題3**　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を因数分解せよ。

**解答**　与式 $=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

**注**　4 項の因数分解は 2 項ずつ組み合わせて共通因数を出すか, 3 項と 1 項で$\bigcirc^2-\triangle^2$ の形を作ることにより因数分解できる。

**例**　(1)　$ab-bc+cd-da=(a-c)b+(c-a)d$

$=(a-c)(b-d)$

(2)　$4x^2+y^2-z^2+4xy=4x^2-4xy+y^2-z^2$

$=(2x-y)^2-z^2$

$=(2x-y+z)(2x-y-z)$