

1

多項式

§1 整式

1 単項式と多項式

$3x$ や $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ のような式を整式というが、これには単項式と多項式を含む。単項式とは $3x$ のように数や文字の積で表される式のことである。

$\frac{x}{3}$ は単項式だが、 $\frac{3}{x}$ は単項式ではない。文字が分母にくるものは含めない。

単項式と多項式

整式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{単項式...数や文字の積で表される式} \\ \text{多項式...単項式の和で表される式} \end{array} \right.$

次に次長と係数みたいな次数と係数であるが、次数は文字をかけ合わせた回数で、係数はその文字の前についている数字で何倍したかを表している。

次数と係数

例 $2x$...次数は1, 係数は2
 $-3x^2$...次数は2, 係数は-3

多項式 $3x^2 - 2x + 4$ は $3x^2$ と $-2x$ と 4 の3つの単項式が和で表されたものである。

$3x^2 + (-2x) + 4$ と必ず+でつながれたものとして考えるので、 $3x^2$, $2x$, 4 としないこと。文字を含んでいない4を定数項という。

項と定数項

整式(多項式) $3x^2 - 2x + 4$ の項は、 $3x^2$ と $-2x$ と 4 (4を定数項という)。

2 多項式における次数

整式の整理

$2x^2y$ と $-5x^2y$ のように文字の部分が全く同じものを同類項という。

整式の同類項をまとめる方法は2通りある。

降べきの順 $-3x^2 - x + 3$

昇べきの順 $3 - x - 3x^2$

- 降べきの順...次数が低くなるように並べる。
- 昇べきの順...次数が高くなるように並べる。

$x^2y + xy^2$ では、 x の次数は2次、

y の次数は2次、整式自体では3次である。

多項式における次数

多項式では各項の次数のうち、最高のものをその整式(多項式)の次数とする。

注 べき(冪)とは、ある1つの数や文字を繰り返しかけ合わせたものをいう。冪が常用漢字に含まれないため累乗に置き換えられたが、降べき(昇べき)の順や方べきの定理にその名を残している。



§2 整式の計算方法

1 指数法則

ここで、指数法則を確認しておこう。(中学校では m, n が自然数、つまり正の整数のときしか扱わなかったが、今後 0, マイナス, 分数と拡張されるのでお楽しみに!)

指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

注 $a^2 \times a^3$ と $(a^2)^3$ を確認しておこう。

$$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = a^5$$

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$$

である。

2 整式の整理

やや複雑な多項式と同類項をまとめて、すっきりと整理しよう。

1つの文字について、降べきの順に並べかえてみよう。これは、因数分解のときに必要な作業になるので、ここでしっかりおさえておこう。

例 $x^2 - 2xy + 3y^2 - 5xy - y$ の同類項をまとめよ。

同類項は $-2xy$ と $-5xy$ であるから $(-2-5)xy = -7xy$ とまとめられる。

$$\text{与式} = x^2 - 7xy + 3y^2 - y$$

例 $2x^2 - 3xy + y^2 + 7x - 4y + 5$ を $[y]$ の降べきの順に整理せよ。

$$\text{与式} = y^2 + (-3x-4)y + 2x^2 + 7x + 5 = y^2 - (3x+4)y + 2x^2 + 7x + 5$$

§3 整式の乗法

1 乗法公式

2 乗の乗法公式についてまとめておこう。高校生は、も公式として覚えておいた方が便利だ。

乗法公式

2 次の乗法公式

例

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a-2b)(a+3b)$$

$$= a^2 + (-2b+3b)a + (-2b) \cdot 3b$$

$$= a^2 + ab - 6b^2$$

高校の数学では3乗の公式は不可欠である。絶対に覚えること。は因数分解のときによく用いる。

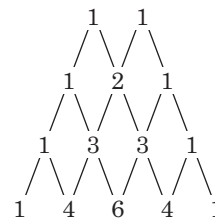
3 次の乗法公式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



パスカルの三角形を利用すると、各項の係数が1, 3, 3, 1とでる。

ちなみに $(a+b)^4$ は

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

となる。

例題1 $(2x-1)(4x^2+2x+1)$ を展開せよ。

解答 与式 $= (2x)^3 - 1$
 $= 8x^3 - 1$

注 不幸にして3次の乗法公式になっていることに気がつかなかった人は、次のようにすることになる。

$$\begin{aligned} & (2x-1)(4x^2+2x+1) \\ &= 2x(4x^2+2x+1) - (4x^2+2x+1) \\ &= 8x^3 + 4x^2 + 2x \\ &\quad - 4x^2 - 2x - 1 \\ & \hline & 8x^3 \qquad -1 \end{aligned}$$

2 やや複雑な展開

やや複雑な展開は、根性があればできるが、それはもっと大事なところで使おう。ここでは頭を使って楽することを考える。

まずは置き換え。

例題2 $(x^2 - 3xy + 2y^2)(x^2 - 3xy - 2y^2)$ を展開する。

解答 $x^2 - 3xy = A$ とおくと、
 与式 $= (A + 2y^2)(A - 2y^2)$
 $= A^2 - (2y^2)^2 = A^2 - 4y^4$

A をもとに戻して、
 与式 $= (x^2 - 3xy)^2 - 4y^4$
 $= x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot (-3xy) + (-3xy)^2 - 4y^4$
 $= x^4 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 4y^4$

例題3 $(2a - 3b - c)^2$ を展開する。

解答 与式 $= (2a - 3b - c)^2$
 $= (2a)^2 + (-3b)^2 + (-c)^2 + 2 \cdot 2a \cdot (-3b) + 2 \cdot (-3b) \cdot (-c) + 2 \cdot (-c) \cdot 2a$
 $= 4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab + 6bc - 4ca$

例題4 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ を展開する。

解答 与式 $= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$
 $(x^2 + 5x) = A$ とおくと、
 与式 $= (A + 4)(A + 6) = A^2 + 10A + 24$
 A をもとに戻して
 与式 $= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24$
 $= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24$
 $= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$

例題5 $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ を展開せよ。

解答 与式 $= (x+1)(x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
 $= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$
 $= (x^3 + 1)(x^3 - 1)$
 $= (x^3)^2 - 1$
 $= x^6 - 1$