1　整式の除法・分数式

整式(Integral expression)および整式の乗法については，数Ⅰの数と式のところで学習済みである。今回は整式の除法と分数式，わかりやすく言えば割り算の仕方を学習する。分数式では約分・通分といった，小学校以来慣れ親しんでいることを文字式で行うにはどうすればいいかを考えよう。

§1　整式の除法

1　整式の除法

たとえば，$13\div4=3$ 余り 1　⇔　$13=3\times4+1$，$a\div3=b$ 余り 2　⇔　$a=3b+2$ のように表すことは既に学んでいる。一般に実数 A，B，Q，R に対して，$\mathrm{A}\div\mathrm{B}=\mathrm{Q}$ 余り R　⇔　$\mathrm{A}=\mathrm{BQ}+\mathrm{R}$ が言えるから，同様にして整式Aを整式Bで割ったら商がQで余りがRのとき，整式 A は $\mathrm{A}=\mathrm{BQ}+\mathrm{R}$ と表すことができる。整数の場合，余りは割る数よりその大きさが小さかったが，整式では，余りの次数は割る整式の次数よりも低くなる。
1 次式で割ったら余りは定数になり，2 次式で割ったら余りは 1 次式になる。商を Q，余りを R と表すのは，quotient(商)，remainder(余り)のイニシャルの q と r からきている。

例　$\mathrm{B}=2x+3$，$\mathrm{Q}=x^2-2x+1$，$\mathrm{R}=5$ ならば

$$\mathrm{A}=\mathrm{BQ}+\mathrm{R}=(2x+3)(x^2-2x+1)+5=2x^3-x^2-4x+8$$

となる。

では逆に，$(2x^3-x^2-4x+8)\div(2x+3)$ の割り算はどのようにして行うのか，コマ送りで見てみよう。

2　筆算の仕方

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & & \\ \hline
2x+3 & 2x^3 & -x^2 & -4x & +8 \\
 & 2x^3 & +3x^2 & & \\ \hline
 & & -4x^2 & -4x & +8
\end{array}$$

$2x^3\div2x=x^2$

← $(2x+3)\times x^2=2x^3+3x^2$ をかく。

$2x^3+3x^2$ を引いた。
$-4x^2-4x+8$ をかく。

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -2x & & \\ \hline
2x+3 & 2x^3 & -x^2 & -4x & +8 \\
 & 2x^3 & +3x^2 & & \\ \hline
 & & -4x^2 & -4x & +8 \\
 & & -4x^2 & -6x & \\ \hline
 & & & 2x & +8
\end{array}$$

$-4x^2\div2x=-2x$ とし，

← $(2x+3)\times(-2x)=-4x^2-6x$ をかく。

次に $-4x^2-4x$ から
$-4x^2-6x$ をひく。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -2x & +1 & \\
\hline
2x+3 & 2x^3 & -x^2 & -4x & +8 \\
 & 2x^3 & +3x^2 & & \\
\hline
 & & -4x^2 & -4x & +8 \\
 & & -4x^2 & -6x & \\
\hline
 & & & 2x & +8 \\
 & & & 2x & +3 \\
\hline
 & & & & 5
\end{array}
$$

$\leftarrow$ $2x \div 2x = 1$
$(2x+3) \times 1 = 2x+3$
$(2x+8)-(2x+3)=5$

3 筆算のポイント

ポイントは１つの文字について次数の高い順に整理し,欠けている次数の項は場所をあける。

例題1　次の計算の商と余りを求めよ。

(1)　$(2x^3+3x^2-4)\div(x+2)$

(2)　$(2x^3-5xy^2+8y^3)\div(x-2y)$

考え方　(1)　$(2x^3+3x^2+0x-4)\div(x+2)$　(2)　$(2x^3+0x^2-5xy^2+8y^3)\div(x-2y)$ として計算する。

解答　(1)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -x & +2 & \\
\hline
x+2 & 2x^3 & +3x^2 & & -4 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & & -x^2 & & \\
 & & -x^2 & -2x & \\
\hline
 & & & 2x & -4 \\
 & & & 2x & +4 \\
\hline
 & & & & -8
\end{array}
$$

したがって，商 $2x^2-x+2$，余り -8

(2)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +4xy & +3y^2 & \\
\hline
x-2y & 2x^3 & & -5xy^2 & +8y^3 \\
 & 2x^3 & -4x^2y & & \\
\hline
 & & 4x^2y & -5xy^2 & +8y^3 \\
 & & 4x^2y & -8xy^2 & \\
\hline
 & & & 3xy^2 & +8y^3 \\
 & & & 3xy^2 & -6y^3 \\
\hline
 & & & & 14y^3
\end{array}
$$

したがって，商 $2x^2+4xy+3y^2$，余り $14y^3$

注 (2)では，x の 3 次式を x の 1 次式で割ると考えている。y は定数扱い。したがって $-14y^3$ は x を含んでいないので定数。1 次式で割っているのだから定数で問題はない。(3 次式の余りが出たと思わないこと)

例題2　整式 $\mathrm{A}=x^3+2x^2+5ax+b$ を，整式 $\mathrm{B}=x^2+x-2$ で割ると，余りが $-4x+3$ になる。このとき a，b の値を求めよ。

解答

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & +1 & & \\ \cline{2-5}
x^2+x-2 & x^3 & +2x^2 & +5ax & +b \\
 & x^3 & +x^2 & -2x & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +(5a+2)x & +b \\
 & & x^2 & +x & -2 \\ \cline{2-5}
 & & & (5a+1)x & +(b+2)
\end{array}
$$

$(5a+1)x+b+2=-4x+3$ より $5a+1=-4$，$b+2=3$

これを解いて $a=-1$，$b=1$

別解　3 次式 A を 2 次式で割るので，その商は 1 次式となる。そのため商を $\alpha x+\beta$　$(\alpha\neq 0)$ とおけば

$$x^3+2x^2+5ax+b=(\alpha x+\beta)(x^2+x-2)-4x+3$$

となる。右辺を整理すると上式は

$$x^3+2x^2+5ax+b=\alpha x^3+(\alpha+\beta)x^2+(-2\alpha+\beta-4)x+3-2\beta$$

となる。この式は x がどのような値をとっても成り立たねばならないので，左右の式の各係数が等しくなければばならない。つまり，

$$
\begin{cases}
1=\alpha \\
2=\alpha+\beta \\
5a=-2\alpha+\beta-4 \\
b=3-2\beta
\end{cases}
$$

という条件を満たさねばならない。上式から $\alpha=1$，$\beta=1$，$a=-1$，$b=1$ が得られる。